



**HAL**  
open science

# Écoulements visqueux laminaires à l'air libre

Thierry Menand

► **To cite this version:**

Thierry Menand. Écoulements visqueux laminaires à l'air libre. Master. France. 2021. hal-03040232v2

**HAL Id: hal-03040232**

**<https://hal.uca.fr/hal-03040232v2>**

Submitted on 18 Dec 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

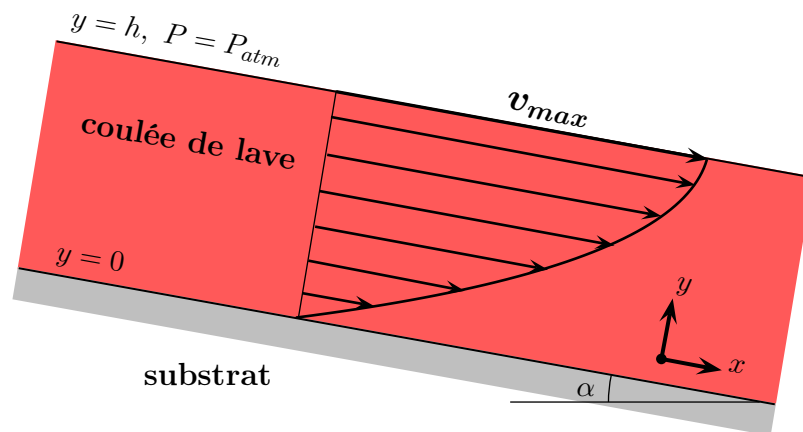
L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution| 4.0 International License

---

# Écoulements visqueux laminaires à l'air libre



Master Sciences de la Terre

UNIVERSITÉ CLERMONT AUVERGNE

ÉCOLE DE L'OPGC

**Thierry Menand**


---

Ce document est un support de cours pour les étudiants en 1<sup>e</sup> année de Master Sciences de la Terre à l'École de l'OPGC (Université Clermont Auvergne) dans le cadre du cours *Ascension et Éruption des Magmas*. Il vient en complément de l'Introduction à la dynamique des fluides visqueux traitée en Licence Sciences de la Terre.

Bonne lecture!

Thierry Menand

Décembre 2020

**Libre accès** –  Ce document est mis à disposition selon les termes de la Licence Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Bilan des forces au sein de l'écoulement</b>	<b>1</b>
<b>3</b>	<b>Écoulement avec une surface supérieure libre</b>	<b>3</b>
3.1	Fluide Newtonien . . . . .	4
3.1.1	Cas général . . . . .	4
3.1.2	Écoulement à l'air libre . . . . .	5
3.2	Fluide de Bingham . . . . .	6
3.2.1	Cas général . . . . .	7
3.2.2	Écoulement à l'air libre . . . . .	9
3.3	Profil de vitesse adimensionné : comparaison des écoulements de fluides Newtonien et de Bingham à l'air libre . . . . .	10
3.4	Remarques et implications géologiques potentielles . . . . .	11
3.4.1	Capacité de transport des coulées de lave (ou des lahars) . . . . .	11
3.4.2	Écoulement le long d'une pente variable . . . . .	11
3.4.3	Condition d'arrêt d'une coulée . . . . .	12



# 1 Introduction

Ce document fait suite à l'*Introduction à la dynamique des fluides visqueux* traitée en Licence et se focalise sur l'écoulement d'un fluide sous l'action de la gravité et à l'air libre, tel qu'une coulée de lave sur les flancs d'un édifice par ex. (ou bien un lahar ou encore un glacier si l'on cherche des exemples non magmatiques) : quelle est la vitesse de la coulée ? quel est le profil de vitesse au sein de l'écoulement ?

Les difficultés pour traiter ce problème sont multiples : on doit en toute rigueur traiter la propagation tri-dimensionnelle du front de la coulée, et la rhéologie des magmas (comment ils se déforment et s'écoulent sous l'effet de contraintes) n'est généralement pas Newtonienne. Nous ne pouvons donc pas *a priori* utiliser l'équation de Navier-Stokes (valable uniquement pour les fluides Newtoniens) pour traiter ce problème. Dans les magmas, les contraintes cisailantes augmentent généralement de manière non linéaire avec la vitesse de déformation (fluide pseudo-plastique, *shear thinning*) avec parfois un seuil de contrainte qui doit être dépassé pour que l'écoulement ait lieu (fluide de Bingham). Ainsi, leur viscosité dépend non seulement de leur composition, de leur température, de leur teneur en cristaux et en bulles, mais elle dépend généralement aussi de la vitesse de déformation.

Néanmoins, nous allons faire des simplifications afin de comprendre le comportement *général* de l'écoulement : nous allons nous restreindre à deux rhéologies simples, Newtonienne (comme référence) et de Bingham, nous négligerons le refroidissement de la coulée et les détails de la propagation à son front, et nous traiterons le problème à deux dimensions pour une coulée d'épaisseur constante en régime permanent. Malgré ces simplifications, nous verrons que nous pouvons néanmoins tirer beaucoup d'informations sur la façon dont un fluide visqueux s'écoule à l'air libre, et notamment comment l'existence d'un seuil de contrainte pour un fluide de Bingham modifie le profil de vitesse et de déformation au sein de l'écoulement. Cela nous permettra ainsi d'expliquer, au moins en première approximation, pourquoi et comment une coulée de boue même relativement fine est capable de déplacer des blocs de roche dont la taille peut atteindre plusieurs mètres, ou encore de proposer une explication pour l'arrêt d'une coulée de lave avant même qu'elle ne se soit totalement refroidie.

## 2 Bilan des forces au sein de l'écoulement

Comme nous ne pouvons pas *a priori* utiliser l'équation de Navier-Stokes, nous allons établir le bilan des forces qui s'exercent sur le fluide pour ensuite relier ces forces à la vitesse de l'écoulement à l'aide de sa loi rhéologique, tout d'abord pour un fluide Newtonien puis pour un fluide de Bingham. Nous allons également supposé que (1) l'écoulement est laminaire et unidirectionnel, (2) le fluide est incompressible (pas de variation de la masse volumique  $\rho$  du fluide) et (3) l'écoulement a lieu en régime permanent (pas de variation dans le temps).

Pour établir ce bilan des forces, nous allons considérer un petit parallélépipède élémentaire au cœur de l'écoulement (Figure 1). Plus précisément, nous allons considérer successivement les quatre faces de ce parallélépipède élémentaire (en amont, en aval, au dessus, et au dessous) et déterminer les forces qui s'exercent sur chacune d'elles, ainsi que la force de volume due à la gravité qui s'exerce sur l'ensemble du parallélépipède élémentaire. En distinguant les forces qui sont parallèles à la direction de l'écoulement ( $\parallel$  à l'axe  $Ox$ ) de celles qui lui sont perpendiculaires ( $\perp$  à l'axe  $Oy$ ), on obtient le Tableau 1. La convention de signe utilisée est la suivante

(Figure 1) : la pression est comptée positive lorsqu'elle est orientée dans le même sens que les axes du repère, et les contraintes cisailantes sont prises positives lorsqu'elles sont orientées dans le même sens qu'un des axes du repère sur une surface orientée positive (normale dans le sens d'un axe du repère).

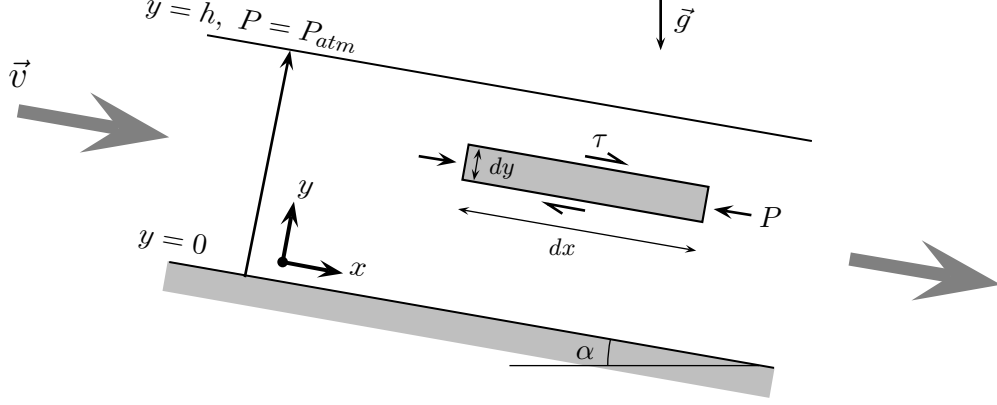


FIGURE 1 – Section verticale schématique d'une coulée de lave à l'air libre. L'écoulement a une épaisseur constante  $h$  et s'écoule de gauche à droite (flèches grises) avec une vitesse  $\vec{v}$  parallèle à la direction  $Ox$  faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale. La direction  $Oy$  est orientée perpendiculairement à la direction d'écoulement et vers le haut : la base de la coulée est située en  $y = 0$  et sa surface supérieure en  $y = h$ . Le rectangle gris représente un parallélépipède élémentaire de lave de longueur  $dx$ , de hauteur  $dy$  et de profondeur  $dz$  (perpendiculaire au plan de la figure) qui va nous permettre d'établir le bilan des forces qui s'exercent dans la coulée.  $P$  et  $\tau$  sont respectivement la pression et la contrainte cisailante exercées par la lave environnante sur ce parallélépipède élémentaire. L'accélération  $\vec{g}$  due à la pesanteur est dirigée verticalement vers le bas.

TABLEAU 1 – Bilan des forces s'exerçant sur le parallélépipède élémentaire gris représenté sur la Figure 1.

Bilan des forces	Forces $\parallel Ox$	Forces $\parallel Oy$
face amont ( $x$ )	$P(x, y) dydz$	0
face aval ( $x + dx$ )	$-P(x + dx, y) dydz$	0
face du dessus ( $y + dy$ )	$\tau(x, y + dy) dx dz$	$-P(x, y + dy) dx dz$
face du dessous ( $y$ )	$-\tau(x, y) dx dz$	$P(x, y) dx dz$
dans le volume	$\rho g \sin \alpha dx dy dz$	$-\rho g \cos \alpha dx dy dz$

Nous allons maintenant écrire l'équilibre des forces (en régime permanent) à l'aide de ce tableau. Pour les forces  $\parallel Ox$  nous avons :

$$\begin{aligned}
 & P(x, y) dydz - P(x + dx, y) dydz + \tau(x, y + dy) dx dz - \tau(x, y) dx dz + \rho g \sin \alpha dx dy dz = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{P(x, y) - P(x + dx, y)}{dx} dx dy dz + \frac{\tau(x, y + dy) - \tau(x, y)}{dy} dx dy dz + \rho g \sin \alpha dx dy dz = 0 \\
 \Leftrightarrow & -\frac{\partial P(x, y)}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau(x, y)}{\partial y} dx dy dz + \rho g \sin \alpha dx dy dz = 0 \\
 \Leftrightarrow & -\frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \tau(x, y)}{\partial y} + \rho g \sin \alpha = 0. \tag{1}
 \end{aligned}$$

De même, pour les forces //Oy nous avons :

$$\begin{aligned}
& -P(x+dx, y) dx dz + P(x, y) dx dz - \rho g \cos \alpha dx dy dz = 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{-P(x+dx, y) + P(x, y)}{dy} dx dy dz - \rho g \cos \alpha dx dy dz = 0 \\
\Leftrightarrow & -\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy dz - \rho g \cos \alpha dx dy dz = 0 \\
\Leftrightarrow & -\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \rho g \cos \alpha = 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = -\rho g \cos \alpha.
\end{aligned}$$

Cette dernière équation peut s'intégrer, ce qui nous donne

$$\boxed{P(x, y) = -(\rho g \cos \alpha) y + p(x)} \quad (2)$$

Distribution de pression dans le fluide.

où  $p(x)$  est une fonction (inconnue pour l'instant) qui ne dépend que de  $x$ , ce qui nous aide pour simplifier l'équation (1) :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} = \frac{dp(x)}{dx} \\
\Rightarrow & \boxed{-\frac{dp(x)}{dx} + \frac{\partial \tau(x, y)}{\partial y} + \rho g \sin \alpha = 0} \quad (3)
\end{aligned}$$

Gradient de pression longitudinal dans le fluide.

$p(x)$  est la pression dynamique qui contribue, en plus de la pression exercée par la gravité (le terme contenant  $\rho g$ ), à la pression totale  $P$  du fluide. Cette distribution de pression (3) nous donne le gradient des contraintes cisailantes dans l'écoulement :

$$\boxed{\frac{\partial \tau(x, y)}{\partial y} = \frac{dp(x)}{dx} - \rho g \sin \alpha.} \quad (4)$$

Gradient de contrainte cisailante dans le fluide.

C'est cette distribution de contrainte cisailante dans la lave (4) qui va nous permettre de calculer le profil de vitesse  $v(x, y)$  de la coulée. Pour cela, nous avons besoin de connaître les conditions aux limites de l'écoulement ainsi que la rhéologie de la lave qui relie sa vitesse d'écoulement  $v$  aux contraintes cisailantes  $\tau$ .

### 3 Écoulement avec une surface supérieure libre

Pour ce genre d'écoulement, les conditions aux limites sont les suivantes :  $v(x, 0) = 0$  (vitesse nulle au contact du substrat) et  $\tau(x, h) = 0$  (pas de contrainte cisailante à la surface libre). Si l'écoulement a lieu en plein air, alors nous avons aussi la condition d'une pression constante et égale à la pression atmosphérique  $P_{atm}$  en tout point de la surface supérieure de l'écoulement :  $P(x, h) = P_{atm}$ .



### 3.1 Fluide Newtonien

Pour un fluide Newtonien, les contraintes cisailantes  $\tau$  sont directement proportionnelles au gradient de vitesse  $\partial v/\partial y$ , le coefficient de proportionnalité étant la viscosité  $\mu$  du fluide :

$$\tau(x, y) = \mu \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \quad (5)$$

Rhéologie Newtonienne.

#### 3.1.1 Cas général

En intégrant la distribution de contrainte cisailante dans le fluide (4) par rapport à  $y$ , nous obtenons

$$\tau(x, y) = \left( \frac{dp(x)}{dx} - \rho g \sin \alpha \right) y + \tau_1(x), \quad (6)$$

où la fonction  $\tau_1(x)$  ne dépend que  $x$ . Les cisaillements sont nuls en  $y = h$  donc

$$\left( \frac{dp(x)}{dx} - \rho g \sin \alpha \right) h = -\tau_1(x), \quad (7)$$

et on en déduit le profil des contraintes cisailantes au sein de l'écoulement (Figure 2) :

$$\tau(x, y) = \left( \rho g \sin \alpha - \frac{dp(x)}{dx} \right) (h - y) \quad (8)$$

Profil de contrainte cisailante dans un fluide Newtonien d'épaisseur constante avec surface supérieure libre.

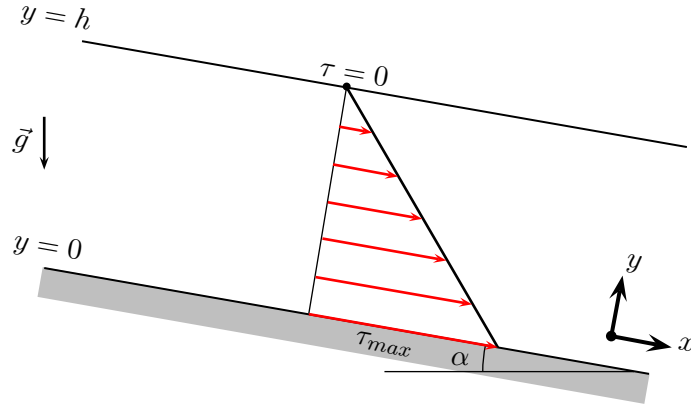


FIGURE 2 – Profil des contraintes cisailantes (courbe noire) dans un écoulement Newtonien d'épaisseur constante avec une surface supérieure libre. Les flèches rouges représentent les contraintes cisailantes à différents niveaux dans l'écoulement : elles diminuent linéairement avec l'altitude depuis une valeur maximale à la base de l'écoulement en  $y = 0$  pour s'annuler à sa surface en  $y = h$  (eq. 8).

Nous utilisons maintenant la loi rhéologique (5) pour en déduire le profil de vitesse :

$$\tau(x, y) = \mu \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \left( \rho g \sin \alpha - \frac{dp(x)}{dx} \right) (h - y)$$

$$\Leftrightarrow v(x, y) = \frac{1}{\mu} \left( \rho g \sin \alpha - \frac{dp(x)}{dx} \right) \left( hy - \frac{y^2}{2} \right) + v_1(x), \quad (9)$$

où la fonction  $v_1(x)$  ne dépend que de  $x$ . La dernière condition aux limites impose  $v(x, 0) = 0$ , donc  $v_1(x) = 0$ . Le profil de vitesse d'un écoulement laminaire Newtonien avec surface supérieure libre est donc

$$\boxed{v(x, y) = \frac{1}{\mu} \left( \rho g \sin \alpha - \frac{dp(x)}{dx} \right) \left( hy - \frac{y^2}{2} \right)} \quad (10)$$

Profil de vitesse Newtonien, surface supérieure libre.

**Remarque :** le cas général que nous venons de traiter concerne le cas d'un écoulement avec une surface supérieure libre mais sans aucune restriction sur la pression  $P(x, y = h)$  qui peut y régner. Ce cas pourrait correspondre à un écoulement laminaire de magma dense sous un autre fluide de très faible viscosité : la surface supérieure du magma qui s'écoule est bien une surface libre puisqu'il s'agit d'une interface fluide-fluide sans cisaillement avec le fluide au-dessus. Un cas particulier et légèrement différent est celui d'un écoulement à l'air libre tel qu'une coulée de lave, un glacier ou une coulée de boue.

### 3.1.2 Écoulement à l'air libre

Dans ce cas particulier, la pression du fluide reste constante et égale à la pression atmosphérique en tout point de sa surface supérieure,  $P(x, h) = P_{atm}$ . D'après l'équation (2), nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} P(x, h) &= -(\rho g \cos \alpha) h + p(x) = P_{atm} \\ \Rightarrow p(x) &= P_{atm} + (\rho g \cos \alpha) h \\ \Rightarrow \frac{dp(x)}{dx} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Le gradient de pression ne dépend donc pas de la position le long de l'écoulement. D'où le profil de vitesse d'un écoulement laminaire Newtonien d'épaisseur constante à l'air libre (profil illustré sur la Figure 3) :

$$\boxed{\begin{aligned} v(x, y) &= \frac{\rho g \sin \alpha}{\mu} \left( hy - \frac{y^2}{2} \right) \\ v_{max} &= \frac{\rho g \sin \alpha}{2\mu} h^2 \end{aligned}} \quad (12)$$

Profil de vitesse Newtonien à l'air libre, épaisseur constante (Figure 3).

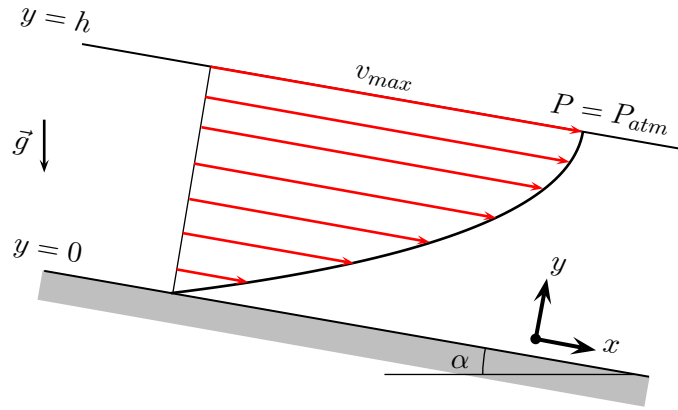


FIGURE 3 – Profil de vitesse Newtonien (courbe noire) pour un écoulement d'épaisseur constante à l'air libre. Les flèches rouges représentent les vecteurs vitesses à différentes hauteurs dans le fluide.

### 3.2 Fluide de Bingham

Nous allons maintenant traiter le cas d'un fluide de Bingham qui est un fluide à seuil, c-à-d qu'un tel fluide ne flue pas tant que la valeur absolue de la contrainte cisailante ne dépasse pas un certain seuil  $\tau_0$  (Figure 4) ; au-delà de ce seuil, le gradient de vitesse  $\partial v / \partial y$  est proportionnel à l'excès de contraintes :

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \begin{cases} \frac{\tau(x, y) - \tau_0}{\mu} & \text{si } \tau \geq \tau_0 \\ 0 & \text{si } |\tau| \leq \tau_0 \\ \frac{\tau(x, y) + \tau_0}{\mu} & \text{si } \tau \leq -\tau_0 \end{cases} \quad (13)$$

Rhéologie de Bingham.

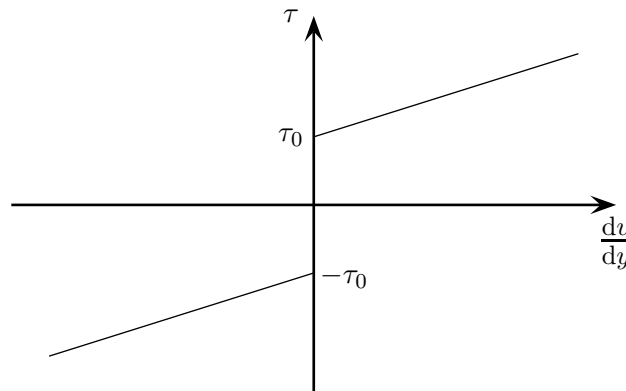


FIGURE 4 – Rhéologie d'un fluide de Bingham : celui-ci ne flue que lorsque la valeur absolue de la contrainte cisailante  $|\tau|$  dépasse un seuil de fluage  $\tau_0$ .

Suivant la magnitude des contraintes cisailantes présentes dans l'écoulement, nous pouvons envisager différents cas de figure. Dans un premier cas, si les contraintes cisailantes sont suffisamment élevées qu'elles dépassent le seuil de contraintes  $\tau_0$  partout, alors il existe un

gradient de vitesse partout dans l'écoulement (eq. 13) et le fluide de Bingham pourra s'écouler sur toute sa hauteur ; celui-ci se comportera en fait comme un fluide Newtonien. Dans un second cas extrême inverse, si les contraintes cisailantes sont partout inférieures (en valeur absolue) au seuil  $\tau_0$ , alors il ne pourra pas y avoir d'écoulement (eq. 13). Le dernier cas, plus général, est intermédiaire, avec potentiellement des zones où les contraintes cisailantes sont supérieures au seuil  $\tau_0$  et d'autres où les contraintes cisailantes sont inférieures à ce seuil.

D'après les profils de contrainte et de vitesse obtenus pour un écoulement Newtonien (Figures. 2 et 3), on peut anticiper que les contraintes cisailantes seront les plus fortes à la base de l'écoulement. De plus, les contraintes doivent s'annuler à sa surface libre. Enfin, le cas de l'écoulement Newtonien suggère que les contraintes cisailantes devraient être positives partout. Dans le cas de figure général décrit précédemment, il devrait donc exister deux zones dans le fluide de Bingham, l'une à la base de l'écoulement où  $\tau > \tau_0$  et l'autre proche de la surface où  $\tau < \tau_0$ .

### 3.2.1 Cas général

Comme dans le cas d'un fluide Newtonien, nous partons du gradient de contrainte cisailante (4) dans l'écoulement. Cette relation reste partout la même, quelque soit la valeur de  $\tau$  par rapport au seuil de contraintes  $\tau_0$ , et nous pouvons donc l'intégrer sur toute la hauteur de l'écoulement. On obtient ainsi

$$\tau(x, y) = \left( \frac{dp(x)}{dx} - \rho g \sin \alpha \right) y + \tau_2(x), \quad (14)$$

où  $\tau_2(x)$  ne dépend que  $x$ . La condition aux limites de cisaillements nuls en  $y = h$  implique

$$\tau_2(x) = \left( \rho g \sin \alpha - \frac{dp(x)}{dx} \right) h, \quad (15)$$

d'où le profil de contraintes cisailantes

$$\tau(x, y) = \left( \rho g \sin \alpha - \frac{dp(x)}{dx} \right) (h - y) \quad (16)$$

Profil de contrainte cisailante dans un fluide de Bingham, épaisseur constante avec surface libre (Figure 5).

La distribution des contraintes cisailantes ne dépend donc pas de la rhéologie du fluide considéré : elle est identique dans un fluide Newtonien et dans un fluide de Bingham (eqs. 8 et 16, Figures 2 et 5). Comme anticipé, les termes  $\left( \rho g \sin \alpha - \frac{dp(x)}{dx} \right)$  et  $(h - y)$  étant tous les deux positifs, les contraintes cisailantes sont bien positives partout dans l'écoulement, et proche de la surface il existe une zone dans laquelle les contraintes sont inférieures au seuil  $\tau_0$ .

Nous utilisons maintenant la loi rhéologique (13) pour en déduire le profil de vitesse : dans quelle région exactement la contrainte cisailante  $\tau$  est elle inférieure à la contrainte seuil  $\tau_0$  (voir Figure 5) ?

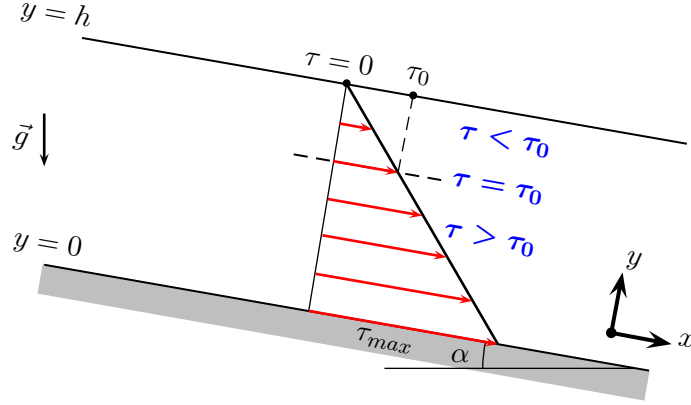


FIGURE 5 – Profil des contraintes cisailantes (courbe noire) dans un écoulement de Bingham d'épaisseur constante avec une surface supérieure libre. Les flèches rouges représentent les contraintes cisailantes à différents niveaux dans le fluide. Le profil est identique au cas Newtonien (Figure 2).

Si  $\tau \leq \tau_0$  alors

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = 0 \Rightarrow v(x, y) = v_2(x), \quad (17)$$

où  $v_2(x)$  est une fonction qui ne dépend que de  $x$ . Puisque  $\left(\rho g \sin \alpha - \frac{dp(x)}{dx}\right)$  est positif<sup>1</sup>, l'équation précédente est vraie tant que

$$\left(\rho g \sin \alpha - \frac{dp(x)}{dx}\right) (h - y) \leq \tau_0 \quad (18)$$

$$\Leftrightarrow (h - y) \leq \frac{\tau_0}{\left(\rho g \sin \alpha - \frac{dp(x)}{dx}\right)} = h_{\text{plug}} \quad (19)$$

$$\Leftrightarrow y \geq h - h_{\text{plug}}. \quad (20)$$

On remarque que l'écoulement est impossible si  $h \leq h_{\text{plug}}$ , car alors la condition (20) est toujours vérifiée pour n'importe quelle valeur de  $y$  (la position verticale  $y$  au sein de l'écoulement est forcément positive), et on aurait alors  $v(x, y) = v_2(x) = 0$  d'après la condition aux limites  $v(x, 0) = 0$ ; la vitesse serait alors nulle partout.

**Résultat 1** : l'écoulement n'est donc possible que lorsque  $h > h_{\text{plug}}$ ; dans ce cas là, comme on l'avait anticipé, l'écoulement n'a lieu que dans la seule région  $0 \leq y < h - h_{\text{plug}}$  (pas d'écoulement entre  $h_{\text{plug}}$  et  $h$ ).

Quand  $y < h - h_{\text{plug}}$ , alors  $\tau > \tau_0$  et l'équation (16) peut se réécrire à l'aide de la loi rhéologique (13) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} &= \frac{\tau(x, y) - \tau_0}{\mu} = \frac{\left(\rho g \sin \alpha - \frac{dp(x)}{dx}\right) (h - y) - \tau_0}{\mu} \\ \Leftrightarrow v(x, y) &= \frac{1}{\mu} \left(\rho g \sin \alpha - \frac{dp(x)}{dx}\right) \left(hy - \frac{y^2}{2}\right) - \frac{\tau_0}{\mu} y + v_3(x) \end{aligned} \quad (21)$$

1.  $\left(\rho g \sin \alpha - \frac{dp(x)}{dx}\right) > 0$  correspond à un gradient de pression négatif, avec une pression plus forte à gauche de l'écoulement qu'à sa droite, qui force le fluide à s'écouler de gauche à droite. Si en fait ce gradient était positif, alors l'écoulement se ferait de droite à gauche. Mais nous pourrions alors tout simplement choisir d'orienter l'axe  $Ox$  dans le sens inverse et nous nous retrouverions dans le cas initial.

$$\Leftrightarrow v(x, y) = \frac{1}{\mu} \left( \rho g \sin \alpha - \frac{dp(x)}{dx} \right) \left( (h - h_{\text{plug}})y - \frac{y^2}{2} \right) + v_3(x), \quad (22)$$

où  $v_3(x)$  est une fonction qui ne dépend que de  $x$ . La condition aux limites à la base de l'écoulement impose  $v(x, 0) = 0$ , donc  $v_3(x) = 0$ . Enfin, quand  $y = h - h_{\text{plug}}$ , alors  $\tau = \tau_0$  et d'après l'équation (17) :

$$\begin{aligned} v(x, h - h_{\text{plug}}) &= v_2(x) \\ \Rightarrow v_2(x) &= \frac{1}{\mu} \left( \rho g \sin \alpha - \frac{dp(x)}{dx} \right) \frac{(h - h_{\text{plug}})^2}{2}, \end{aligned}$$

qui est la vitesse à laquelle se déplace la zone supérieure non cisailée (*plug*).

**Résultat 2** : La partie supérieure de l'écoulement, d'épaisseur  $h_{\text{plug}}$ , se déplace d'un seul tenant, rigide comme un solide, à une vitesse uniforme (*plug flow*) qui est la vitesse maximale de l'écoulement, et les contraintes cisailantes  $y$  sont partout inférieures ou égales au seuil  $\tau_0$ .

Le profil de vitesse d'un écoulement laminaire de Bingham avec surface libre s'écrit donc :

$$\boxed{ \begin{aligned} h_{\text{plug}} &= \frac{\tau_0}{\left( \rho g \sin \alpha - \frac{dp(x)}{dx} \right)} \\ v(x, y) &= \begin{cases} 0 & \text{si } h \leq h_{\text{plug}} \\ \frac{1}{\mu} \left( \rho g \sin \alpha - \frac{dp(x)}{dx} \right) \left( (h - h_{\text{plug}})y - \frac{y^2}{2} \right) & \text{si } y \leq h - h_{\text{plug}} \\ v_{\text{max}} = \frac{1}{2\mu} \left( \rho g \sin \alpha - \frac{dp(x)}{dx} \right) (h - h_{\text{plug}})^2 & \text{si } y \geq h - h_{\text{plug}} \end{cases} \end{aligned} \quad (23)$$

*Plug flow* - Profil de vitesse de Bingham, surface supérieure libre.

**Remarque** : on retrouve bien le profil de vitesse Newtonien dans le cas particulier où le seuil de fluage est nul,  $\tau_0 = 0$ . En effet, le profil de vitesse (23) serait alors caractérisé par  $h_{\text{plug}} = 0$ , et donc par sa deuxième expression (la condition  $y \leq h - h_{\text{plug}}$  serait toujours vérifiée) qui correspond précisément au profil de vitesse (10) pour un fluide Newtonien.

**Résultat 3** : La vitesse maximale de l'écoulement (la vitesse de la partie supérieure rigide) diminue avec l'épaisseur  $h_{\text{plug}}$  et donc avec le seuil de fluage  $\tau_0$ .

### 3.2.2 Écoulement à l'air libre

Si la surface supérieure est à l'air libre alors  $dp(x)/dx = 0$  (eq. 11). D'où le profil de vitesse d'un écoulement laminaire de Bingham à l'air libre :

$$\boxed{ \begin{aligned} h_{\text{plug}} &= \frac{\tau_0}{\rho g \sin \alpha}, \\ v(x, y) &= \begin{cases} 0 & \text{si } h \leq h_{\text{plug}} \\ \frac{\rho g \sin \alpha}{\mu} \left( (h - h_{\text{plug}})y - \frac{y^2}{2} \right) & \text{si } y \leq h - h_{\text{plug}} \\ v_{\text{max}} = v_{\text{plug}} = \frac{\rho g \sin \alpha}{2\mu} (h - h_{\text{plug}})^2 & \text{si } y \geq h - h_{\text{plug}} \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

Profil de vitesse de Bingham à l'air libre, épaisseur constante (Figure 6).

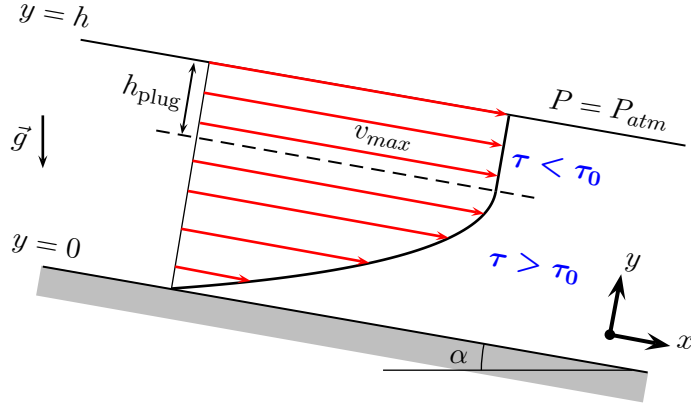


FIGURE 6 – *Plug flow*. Profil de vitesse de Bingham (courbe noire) pour un écoulement d'épaisseur constante à l'air libre. Les flèches rouges représentent les vecteurs vitesses à différentes altitudes dans le fluide. La partie supérieure de l'écoulement, d'épaisseur  $h_{\text{plug}}$ , se déplace d'un seul tenant avec une vitesse uniforme maximale.

### 3.3 Profil de vitesse adimensionné : comparaison des écoulements de fluides Newtonien et de Bingham à l'air libre

On peut considérer l'écoulement d'un fluide de Bingham comme le cas général et l'écoulement d'un fluide Newtonien comme un cas particulier ( $\tau_0 = 0$ ) de ce cas général. En adimensionnant les profils de vitesses obtenus (eqs. 12 et 24), on peut alors représenter sur la même figure ces différents profils et ainsi mettre en évidence l'effet du seuil de contrainte  $\tau_0$  sur la géométrie et la vitesse d'écoulement.

Pour cela, nous allons adimensionner la position  $y$  par rapport à l'épaisseur du fluide et ainsi obtenir la position adimensionnée  $\hat{y} = y/h$ , et adimensionner la vitesse  $v$  par rapport à la vitesse maximale (12) pour un fluide Newtonien :  $\hat{v} = v / [(\rho g h^2 \sin \alpha) / 2\mu]$ . L'ensemble des profils de vitesse peut ainsi être réécrit sous une seule forme adimensionnée :

$$\hat{h}_{\text{plug}} = \frac{\tau_0}{\rho g \sin \alpha h},$$

$$\hat{v}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \hat{y} \leq 1 - \hat{h}_{\text{plug}} \\ 2\hat{y} \left(1 - \hat{h}_{\text{plug}} - \frac{\hat{y}}{2}\right) & \text{si } \hat{y} \geq 1 - \hat{h}_{\text{plug}} \end{cases} \quad (25)$$

Profil de vitesse adimensionné illustré sur la Figure 7.

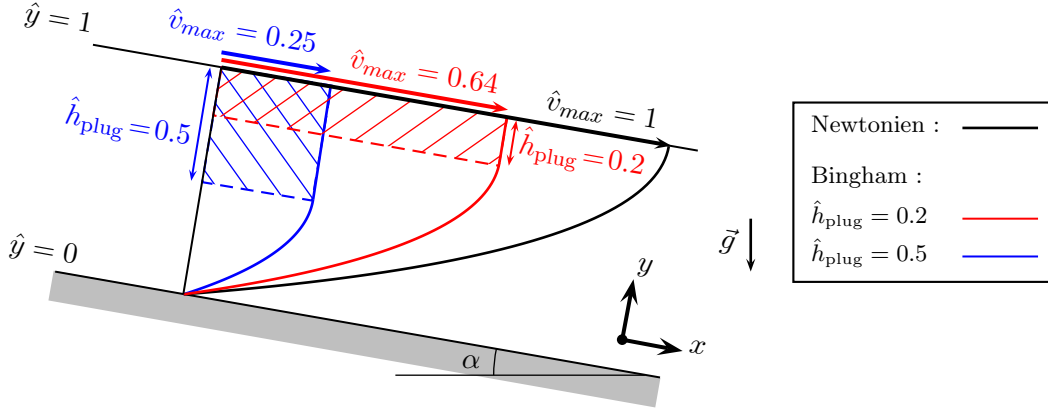


FIGURE 7 – Profils de vitesse adimensionnés pour un écoulement d’épaisseur constante à l’air libre : Newtonien (noir); Bingham,  $\tau_0/(\rho g \sin \alpha h) = 0.2$  (rouge); Bingham,  $\tau_0/(\rho g \sin \alpha h) = 0.5$  (bleu).  $\hat{v}_{max}$  est la vitesse à la surface de l’écoulement et la vitesse de la zone non cisailée (zone hachurée) si celle-ci existe.

La Figure 7 met en évidence le fait que la vitesse de l’écoulement, et donc sa vitesse maximale, diminue avec l’épaisseur de la partie non cisailée  $h_{plug}$  et donc avec le seuil de fluage  $\tau_0$ . Dans le cas extrême où la contrainte cisailante à la base de l’écoulement est tout juste supérieure au seuil  $\tau_0$ , l’épaisseur  $h_{plug}$  s’étend sur la quasi-totalité de l’écoulement, seule la base est capable de s’écouler, emmenant alors le reste de l’écoulement, non-cisailé, à une vitesse infiniment petite.

### 3.4 Remarques et implications géologiques potentielles

#### 3.4.1 Capacité de transport des coulées de lave (ou des lahars)

La partie supérieure de l’écoulement, d’épaisseur  $h_{plug}$ , se déplace d’un seul tenant rigide et n’est aucunement déformée, elle se comporte donc comme un solide. Si une coulée de lave (ou de boue) peut être approximée à un fluide de Bingham, alors nous avons là une explication pour leur capacité à déplacer d’énormes blocs de roche : ceux-ci sont pris dans la partie supérieure, non déformée, de la coulée qui est entraînée par sa partie inférieure cisailée.

#### 3.4.2 Écoulement le long d’une pente variable

Ce cas devrait s’accompagner de variation de vitesse le long de la pente et donc dans le temps (pour un élément de fluide donné). En toute rigueur, ce type d’écoulement ne peut donc pas être traité en régime stationnaire comme nous venons de le faire. Toutefois, le profil stationnaire (23) que nous venons d’obtenir est néanmoins utile : ce profil suggère que si l’écoulement a lieu le long d’une pente qui diminue, alors on peut raisonnablement penser que l’épaisseur  $h_{plug}$  de la partie supérieure rigide non cisailée augmentera et que l’épaisseur mobile de l’écoulement diminuera. Ce profil suggère également qu’une diminution de la pente  $\alpha$  se traduira par une diminution de la vitesse maximale de l’écoulement. Ainsi, on peut anticiper que l’écoulement s’arrêtera lorsque la pente devient si faible que  $h_{plug} = h$ , l’écoulement sera alors rigide sur toute sa hauteur. Une coulée d’une épaisseur  $h$  et dont le fluide (lave, boue...) est caractérisé par une contrainte seuil  $\tau_0$  s’arrêterait donc une fois que son substratum atteint une pente critique  $\alpha_0 = \arcsin(\tau_0/(\rho gh))$ .



### 3.4.3 Condition d'arrêt d'une coulée

Si une coulée de lave n'est plus alimentée à sa source, son épaisseur diminuera au fur et à mesure qu'elle se propagera. Là aussi, ce cas devrait s'accompagner d'une variation de vitesse dans le temps et ne peut donc pas être traité en régime stationnaire. Néanmoins, le profil stationnaire (23) suggère que l'épaisseur  $h_{\text{plug}}$  occupera une part d'autant plus importante au sein de la coulée que celle-ci s'affine. On peut ainsi anticiper que la coulée de lave s'arrêtera lorsque son épaisseur sera égale à  $h_{\text{plug}}$  (même si sa température est encore supérieure au solidus).